Polinomios

Alberto Daza García y Ulises Pastor Díaz

Problema 1: Un polinomio mónico de grado 4 satisface $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$. Determina $P(12) + P(-8)$.

Problema 2: Encontrar todos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con coeficientes reales que cumplen:

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Problema 3: Encontrar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que cumplen:

$$P(x)^2 = P(x^2).$$

Problema 4: Encontrar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que cumplen:

$$P(2x)^2 = 16P(x^2).$$

Problema 5: Hallar el valor del número real m para el que el siguiente polinomio tiene dos raíces reales que son una inversa de la otra:

$$x^4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x^3 + 3x^2 + mx + 2.$$

Problema 6: [Russian Math Olympiad, 2004] El polinómio con coeficientes enteros $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ tiene n raíces enteras distintas. Probar que si las raíces son primas entre sí, entonces a_n y a_{n-1} son coprimos.

Problema 7: Encuentra todos los polinomios reales de la forma $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tales que a, b y c son raíces de P.

Problema 8: Sean α, β y γ las raices del polinómio $x^3 - 3x + 1$ hallar otro polinómio de grado 3 cuyas raíces sean $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, $\frac{1-\beta}{1+\beta}$ y $\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$.

Problema 9: [USAMO, 1976] Sean $P(x), Q(x), R(x)$ y $S(x)$ polinómios tales que:

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x)$$

Probar que $(x - 1)$ divide a P(x).

Problema 10: Si $P(x)$ es un polinómio de grado 2019 tal que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ para $k = 0, 1, ..., 2019$ ¿Cuál es el valor de $P(2020)$?

Problema 11: Sean x e y distintos de cero y que cumplen $x^2 + xy + y^2 = 0$. Encuentra $(\frac{x}{x+y})^{2019} + (\frac{y}{x+y})^{2019}$.

Problema 12: Sea $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ con raíces $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ y $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + ... + b_{n-1}x + b_n$ con raíces $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$ dos polinomios complejos. Demuestra que si $a_1 + a_3 + ...$ y $a_2 + a_4 + ...$ son números reales, entonces $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ es un número real.

Problema 13: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que la ecuación $P(x) = 7$ tiene al menos cuatro soluciones enteras. Demostrar que la ecuación $P(x) = 14$ no tiene soluciones enteras.

Problema 14: [IMO, 2016] Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes enteros, k un entero positivo y $Q(x) = P(...P(P(x))....)$, donde P ocurre k veces. Demuestra que hay como máximo n valores enteros para los cuales $Q(x) = x$.

Problema 15: [2000, PUTNAM] Sea $f(x)$ un polinómio con coeficientes enteros y $a_0, a_1, ..., a_m, ..,$ número enteros tales que $a_0 = 0$ y $a_i = f(a_{i+1})$ para todo $i \geq 0$. Probar que si $a_m = 0$, $f(a_2) = 0$ ó $f(a_1) = 0$.